

Travaux dirigés N° 2 de Mécanique générale

Exercice 1

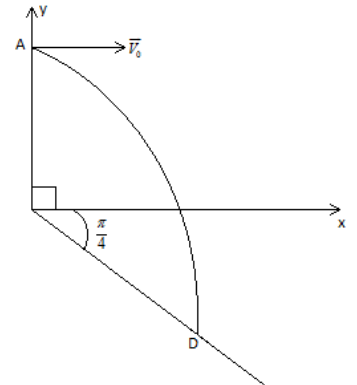
Un skieur quitte en A l'extrémité d'un tremplin de saut avec une vitesse horizontale $\vec{V}_0 = V_0 \cdot \vec{e}_{x_0}$. Il

retombe en D sur la piste de réception inclinée à $\frac{\pi}{4}$ par rapport à

l'horizontale. On note $\vec{OA} = h \cdot \vec{e}_{y_0}$.

Déterminer la longueur du saut OD ainsi que la durée de ce saut dans les cas suivants :

- La résistance de l'air est négligée.
- La résistance de l'air est proportionnelle à la vitesse et pour un skieur de masse m, elle s'écrit $\vec{F} = -k \cdot m \cdot \vec{V}$. A.N. $k = 0,4$, $V_0 = 25 \text{ m.s}^{-1}$, $h = 8 \text{ m}$.



Exercice 2

Une fusée est lancée verticalement et n'est soumise qu'à l'action de la pesanteur. A l'instant initial, sa masse est m_0 et sa vitesse est nulle. Les gaz sont éjectés avec $\vec{u}$ par rapport à la fusée également verticale avec un débit massique constant.

- Trouver l'équation différentielle permettant de calculer la valeur v de la vitesse de la fusée par rapport à un référentiel terrestre supposé galiléen.
- Calculer v à un instant t.
- Calculer la distance parcourue par la fusée à un instant t.
- La masse du carburant étant m, trouver la vitesse et la distance parcourue lorsque la combustion s'arrête.

Exercice 3

On considère un repère (Ox, Oy) (qu'on supposera galiléen), Ox étant horizontal, Oy vertical. A l'instant initial et de l'origine O, on lance des points matériels M, ayant tous la même masse, dont les vitesses initiales ont toutes la même valeur v_0 , les vecteurs vitesse initiales $\vec{v}_{0i}$ étant tous contenus dans le plan xOy et ayant des orientations différentes. Ces points matériels sont soumis outre leur poids à des forces de frottement fluide $-k\vec{v}$, le coefficient étant le même pour tous les points.

Montrer qu'à un instant t donné tous les points M, sont situés sur un cercle dont on donnera le centre et le rayon.

Exercice 4

Une particule M de masse m, est soumise à une force centrale de la forme $\vec{F} = \left(\frac{k}{\rho^n} \right) \cdot \vec{e}_\rho$ où k et n

sont des constantes. Elle est initialement immobile pour $\rho = \rho_0$ et sa vitesse pour $\rho = 0$ est V_0 .

- Déterminer les conditions sur k et n pour que l'énergie mécanique de M soit conservée.
- Calculer la valeur de V_0

Exercice 5

Une particule M de masse m est soumise à une force centrale dérivant d'une énergie potentielle :

$$U(r) = -\frac{k}{r}. \text{ On pose : } \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{OM}}, \vec{p} = m\vec{v}, \vec{\sigma}_o = \vec{r} \wedge \vec{p}$$

- Montrer que $\vec{\sigma}_o$ est constant. Qu'en déduit-on quant à la trajectoire de M.

- 2) Montrer que le vecteur $\vec{A} = \vec{p} \wedge \vec{\sigma}_o - mk \vec{r}/k$ est une constante du mouvement.
- 3) Calculer $\vec{A}$ pour une trajectoire circulaire autour de O.

Exercice 6

On considère un champ de forces planes d'équation polaires :

$$f_r = \frac{2r}{\cos^2 \theta} (1 + \cos^4 \theta)$$

$$f_\theta = -\frac{2r \sin \theta}{\cos^3 \theta} (1 + \cos^4 \theta)$$

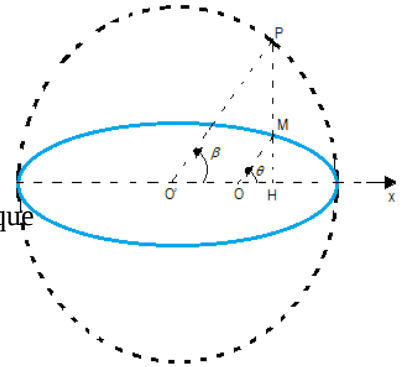
Déterminer la fonction de forces dont dérive ce champ de forces.

Exercice 7

Soit un point matériel décrivant une orbite elliptique d'excentricité e , de grand axe $2a$ et de foyer O. Soit une position M du point matériel. Soit le cercle de centre O', centre de l'ellipse et de rayon a . Soit P le point de ce cercle situé sur la perpendiculaire au grand axe passant par M.

Soit $\theta = (\vec{Ox}, \vec{OM})$ et $\beta = (\vec{O'x}, \vec{O'P})$

- a) Trouver une relation entre β , θ et e .
- b) Exprimer la vitesse de M en fonction de β , e , k , m et a .
- c) Trouver les points de la trajectoire dont la vitesse est la moyenne géométrique des vitesses à l'apogée et au périhélie.



Exercice 8

On considère une particule qui se déplace dans le champ de forces.

$$\vec{F} = (x - ay)\vec{i} + (3y - 2x)\vec{j}$$

Où $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont des vecteurs unitaires du repère cartésien plan Oxy.

- 1) Calculer le travail reçu par la particule en fonction de a .
 - a) Si elle se déplace en ligne droite du point O(0,0) au point A(2,4)
 - b) Si elle se déplace de O en A suivant le trajet OA'A (A' = projection de A sur Ox)
 - c) Si elle se déplace de O en A suivant le trajet OA''A (A'' = projection de A sur Oy)
- Conclusion
- 2) Calculer en fonction de a le travail reçu par la particule qui effectue un tour le long du cercle centré en O, et de rayon 2 dans le sens trigonométrique.
- 3) Pour quelle valeur de a le champ de force $\vec{F}$ dérive-t-il d'une énergie potentielle V ? Déterminer $V(x, y)$. Que peut-on alors dire des travaux calculés précédemment?

Exercice 9

Une particule de masse m décrit la trajectoire elliptique d'excentricité e , de demi-axes a et b , de centre O, d'équation

$$\vec{OM} = (a \cos \omega t)\vec{i} + (b \sin \omega t)\vec{j}$$

Où $\vec{i}$ et $\vec{j}$ désignent des vecteurs unitaires dans le repère cartésien Oxy orthonormé

- 1) a) Montrer que la résultante $\vec{F}$ des forces agissant sur M, dérive d'une énergie potentielle E_p qu'on déterminera en fonction de m , ω et $r = |\vec{OM}|$
- b) En déduire le travail de $\vec{F}$ lorsque la particule se déplace de M_1 ($OM_1 = r_1$) vers M_2 ($OM_2 = r_2$)

- 2) a) Calculer le rapport des énergies cinétiques de la particule en A et B, en fonction de l'excentricité de la trajectoire.
- b) Vérifier le théorème de l'énergie cinétique entre les points A et B
- 3) a) Vérifier le principe de conservation de l'énergie mécanique totale de la particule.
- b) En déduire la position de M et les instants où l'énergie se répartit en quantités égales sous forme cinétique et sous forme potentielle.

Exercice 10

Une planète P est repérée par rapport au soleil, par les coordonnées polaires r et θ . L'énergie potentielle gravitationnelle (attractive) entre la planète P de masse m et le soleil de masse M , est $V(r) = K/r$ ($K = GMm = \text{Cte positive}$). On désigne par σ le moment cinétique de la planète par rapport au soleil et par E son énergie totale.

- 1) Etablir l'équation différentielle liant $u = 1/r$ et l'angle polaire θ
- 2) En déduire
 - a) l'équation de la trajectoire de la planète P, relativement au soleil ;
 - b) la relation entre la période du mouvement de P et l'énergie E , ainsi que la 3^e loi de Kepler.
- 3) *Application* : a) Mesure de la masse d'une planète : La planète Mars de masse m , décrit autour du soleil, de masse M , une ellipse de demi-grand axe avec $a = 230$ millions de km, en 1,88 année. Le satellite Deimos de masse m' décrit autour de la planète Mars une ellipse de demi-grand axe $a' = 23\,000$ km en 30 h. Déterminer la masse de la planète Mars. On donne $M = 2.10^{30}$ kg et $M \gg m \gg m'$
- b) Rencontre de deux particules : Une particule se déplace sur orbite circulaire avec une période T , autour d'une autre particule sous l'influence de forces gravitationnelles. Le mouvement est brutalement arrêté ; au bout du temps t , les particules se heurteront. Calculer le rapport t/T

Exercice 11

- 1) Une comète décrit une orbite elliptique du soleil qui occupe un foyer de l'ellipse, avec une période $T = 11,5$ années. La distance du périhélie au soleil est $r_p = 0,2 \mu.A.$ (l'unité astronomique $\mu.A.$, a pour valeur la distance moyenne de la terre au soleil, soit 150 millions de km).

Calculer

- a) la distance r_A de l'apogée au soleil
- b) l'excentricité de la trajectoire elliptique

On donne période du mouvement de la terre autour du soleil $T_0 = 1$ an.

- 2) La trajectoire de la comète est pratiquement confondue avec une parabole. Comparer la vitesse v_p de la comète au périhélie, à la vitesse v_0 de translation de la terre autour du soleil